



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت

ساعت امتحان: ۱۰:۳۰ صبح
وقت امتحان: ۱۱۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۸ / ۳ / ۱۸
تعداد برگ سؤال: ۲ برگ

ش داوطلب: نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف (دوره‌ی دوم) نوبت امتحانی: خرداد ماه
نام خانوادگی: نام پدر: پایه: دهم
سؤال امتحان درس: حسابان ۱ نام دبیر: جناب آقای ارجمندی سال تحصیلی: ۹۷-۹۸

۲. ۱. در یک دنباله هندسی پنج جمله ای، مجموع چهار جمله نخست برابر 30090 و مجموع چهار جمله ای انتهایی برابر 60180 است. جمله نخست دنباله را بیابید.

۱. ۲. الف) ماشین A کاری را ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند. چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند.

۱. ب) نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه راس مثلث اند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH را بیابید.

۱,۵. ۳. هرگاه $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ دامنه و ضابطه fog را بیابید.

پاسخنامه سفید داده شود.

پاسخ سوالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخنامه سفید ندارد.

۱,۵

۴. برد تابع $f(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{3} \right] \right|$ را بیابید.

۱,۵

۵. نمودار $y = -3^x - 2$ را رسم نمایید.

۱,۵

۶. هرگاه $\log_4 6 = a$ و باشد $\log_{24} 54$ را بیابید.

۲

۷. مقدار دقیق $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\operatorname{tg} 10.5^\circ$ را تعیین کنید.

۲

۸. مقدار $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos 2x}$ را بیابید هرگاه $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ باشد.

۱

۹. نمودار و ضابطه تابعی را رسم کنید که خصوصیات خدی مقدار زیر را داشته باشد
(تابع صعودی در این مسئله خط با شیب ۱ و تابع نزولی خط با شیب -۱ است)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \quad \text{و} \quad f(2) = 0$$

$$\lim_{f \rightarrow 1^+}$$

۱۰. حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin 2x)(1 + \sin^2 x)}{\sin^2(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[4]{\sin x})^2}$$

۱۱. a و b را طوری بیابید که تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(|x|+|-x|)+a\cos(\sqrt[4]{|x+1|}x)}{\sin x \operatorname{tg} x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{1 \cdot x^2 - 2bx}{x^2 + 6x^2 - 7x} & x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$x = 0$$

$$x < 0$$

۱. در یک دنباله هندسی پنج جمله ای، مجموع چهار جمله نخست برابر ۳۰۰۹۰ و مجموع چهار جمله ای انتهایی برابر ۶۰۱۸۰ است. جمله

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 30090$$

نخست دنباله را بیابید. (۲ نمره)

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{a_2(1 - q^4)}{1 - q} = 70180 \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = q = 2, 15a_1 = 30090 \rightarrow a_1 = 2006$$

۲. الف) ماشین A کاری را ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند. چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند. (۱ نمره)

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{18} \rightarrow \frac{1}{B-15} + \frac{1}{B} = \frac{1}{18} \rightarrow 34B - 270 = B^2 - 15B$$

$$\rightarrow (B-45)(B-4) = 0 \rightarrow B = 45, A = 3.$$

ب) نقاط A(۴ و ۲) و B(۱ و ۱) و C(۸ و ۲) سه راس مثلث اند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH را بیابید. (۱ نمره)

$$m_{AH} = V \rightarrow AH: y - 2 = V(x - 4) \rightarrow AH: y = Vx - 2V$$

$$AH: Vx - y - 2V = 0$$

$$M \left| \begin{matrix} 9/2 \\ -3/2 \end{matrix} \right. \rightarrow MH = \frac{\left| \frac{4V}{2} + \frac{V}{2} - 2V \right|}{\sqrt{4V^2 + 1}} = \frac{V}{\sqrt{5}} = \frac{V}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{V\sqrt{2}}{10}$$

۳. هرگاه $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ دامنه و ضابطه fog را بیابید. (۱، ۵ نمره)

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [-2, 2], D_{fog} = \{ -2 \leq x \leq 2 \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R} \} = [-2, 2]$$

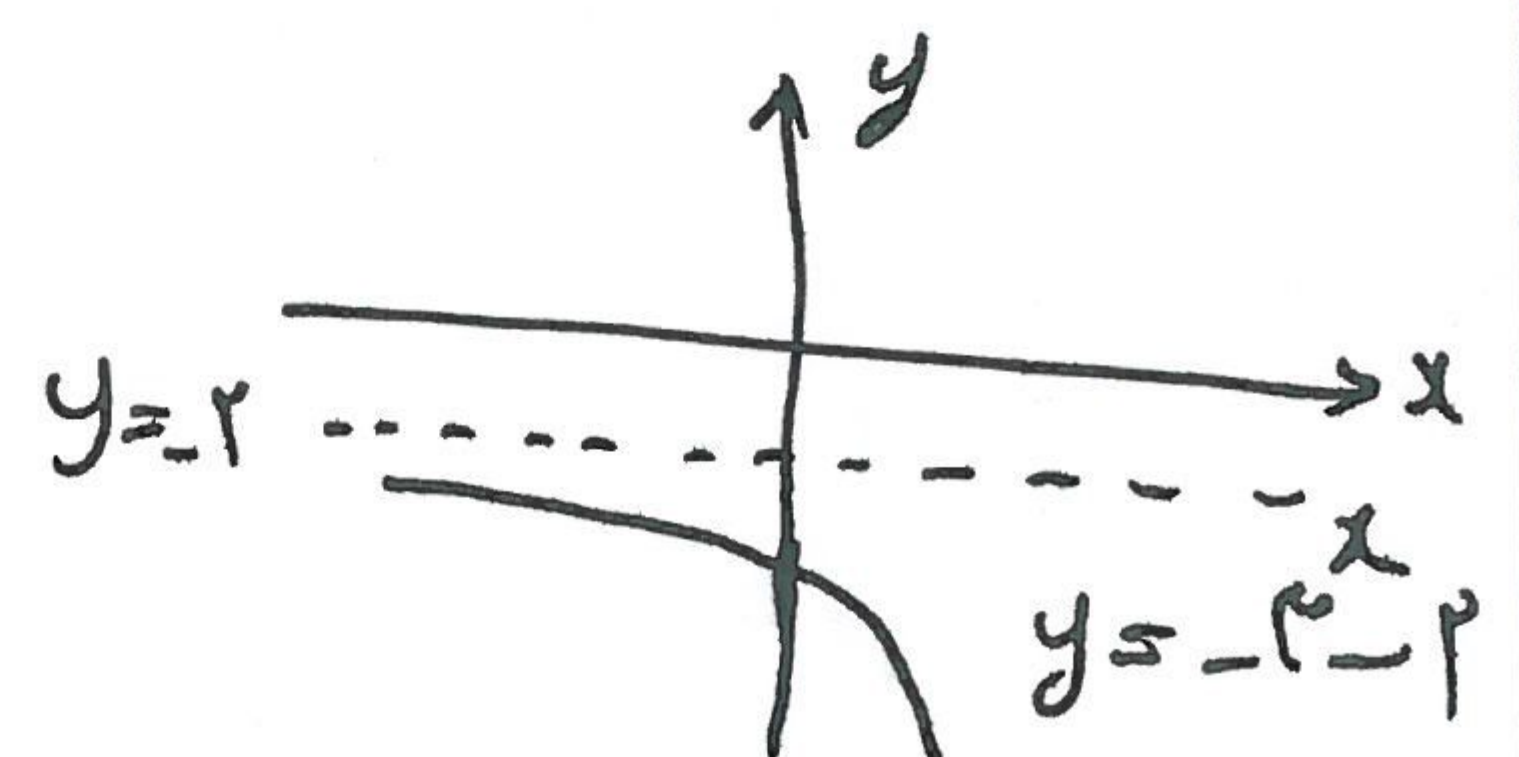
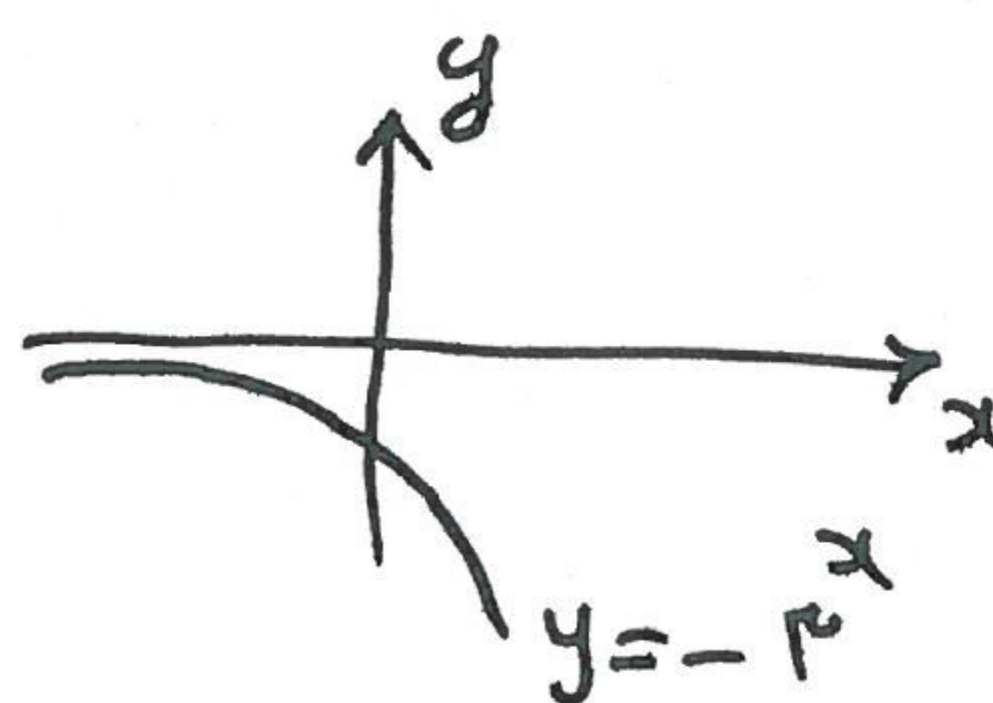
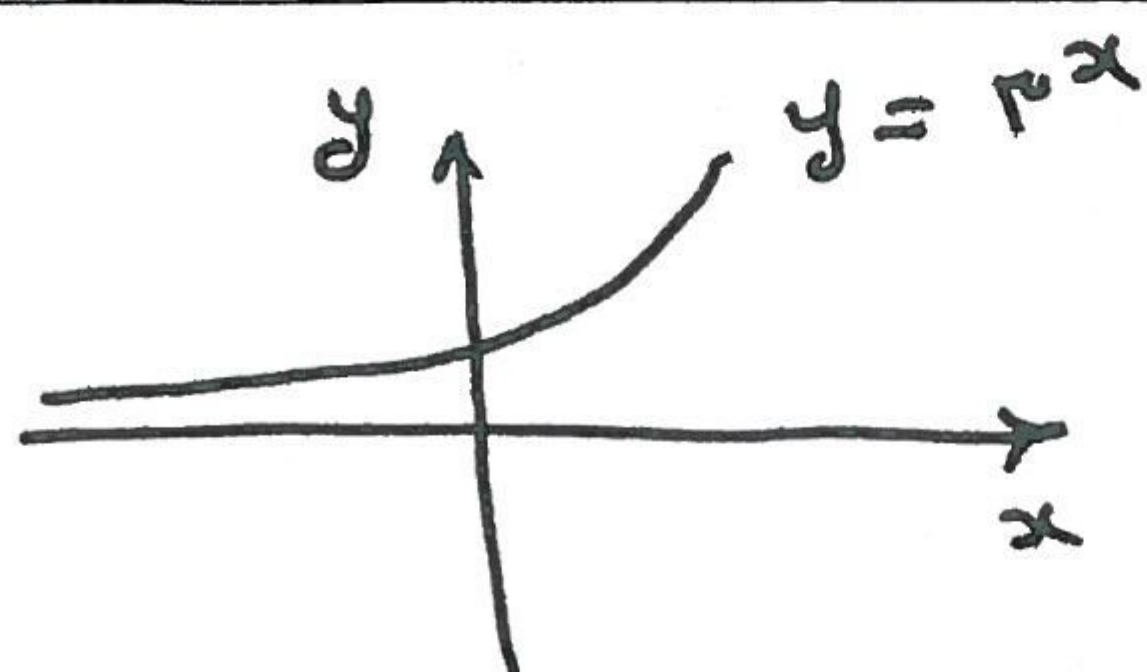
$$fog(x) = f(\sqrt{4 - x^2}) = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

۴. برد تابع $f(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{x} \right] \right|$ را بیابید. (۵، ۱ نمره)

$$x + \frac{1}{x} - \left\lfloor x + \frac{1}{x} \right\rfloor - \frac{1}{x} = f_1(x)$$

$$-\frac{1}{x} \leq f_1(x) < \frac{2}{x} \rightarrow f(x) = |f_1(x)| \rightarrow R_f = \left[0, \frac{2}{x} \right)$$

۵. نمودار $y = -3^x - 2$ را رسم نمایید. (۵، ۱ نمره)



۶. هرگاه $\log_4 6 = a$ و باشد $\log_{24} 54$ را بیابید. (نمره ۱,۵)

$$\log_4^4 = \frac{1}{4} \log_2^4 = \frac{1}{4} (1 + \log_2^3) = a$$

$$\log_2^3 = 4a - 1 \rightarrow \log_{24}^{54} = \frac{\log_2^{54}}{\log_2^{24}} = \frac{1 + 3 \log_2^3}{3 + \log_2^3} = \frac{1 + 3(4a - 1)}{3 + 4a - 1} = \frac{4a - 2}{4a + 2} = \frac{2a - 1}{2a + 1}$$

۷. مقدار دقیق $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\text{tg } 10.5^\circ$ را تعیین کنید. (نمره ۲)

$$\text{tg } 10.5^\circ = \text{tg}(4.5^\circ + 6^\circ) = \frac{\text{tg } 4.5^\circ + \text{tg } 6^\circ}{1 - \text{tg } 4.5^\circ \text{tg } 6^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

۸. مقدار $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x}$ را بیابید هرگاه $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ باشد. (نمره ۲)

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 + \sin x \cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 + \frac{\sqrt{18}}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{25 \times 3}{18 \times 4}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{14}{9} = \frac{25}{24}$$

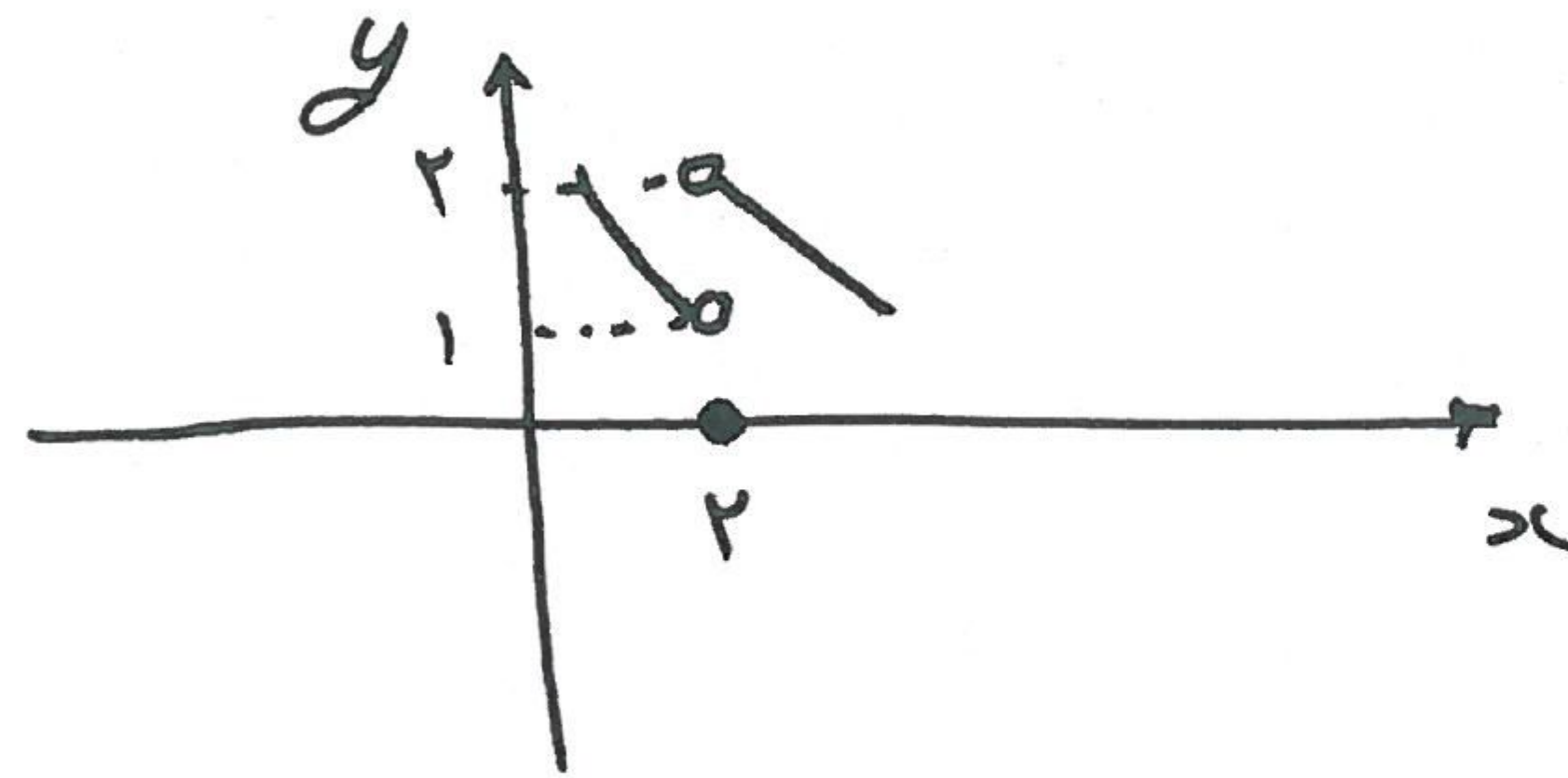
$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{18}}{18}$$

۹. نمودار و ضابطه تابعی را رسم کنید که خصوصیات خدی مقدار زیر را داشته باشد (نمره ۱)

(تابع صعودی در این مسئله خط با شیب ۱ و تابع نزولی خط با شیب -۱ است)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \quad \text{و} \quad f(2) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ -x + 3 & x > 2 \end{cases}$$



۱۰. حاصل حدود زیر را بیابید. (نمره ۴)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{(1)(2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{r x - r \sqrt{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(r \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{r}} \frac{(1 + \sin^r x)(1 + \sin^r x)}{\sin^r(x + \frac{\pi}{r})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{r}} \frac{(\sin x + \cos x)^r (1 + \sin^r x)}{\frac{1}{r} (\sin x + \cos x)^r} = r \left(1 + \frac{1}{r}\right) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\cos^r x}{(\sqrt[r]{\sin x} - \sqrt[r]{\sin x})^r} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t^{r/r})^r}{(t^r - t^r)^r} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^r} \left(\frac{t^{r/r} - 1}{t - 1}\right)^r = (r/r)^r = 1$$

$$\sqrt[r]{\sin x} = t$$

یادداشت (2+1)

۱۱. a و b را طوری بیابید که تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته باشد. (انمره)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(|x| + |-x|) + a \cos(r|x|x)}{\sin x \operatorname{tg} r x} & x > 0 \\ r & x = 0 \\ \frac{1 \cdot x^r - r b x}{x^r + r x^r - r x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-a + a \cos r x}{\sin x \operatorname{tg} r x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-r a \sin^r r x}{\sin x \operatorname{tg} r x} = -r a (r)(1) = -r a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 \cdot x - r b)}{x(x^r + r x^r - r x)} = \frac{-r b}{-r} = \frac{r b}{r}$$

$$\frac{r b}{r} = -r a = r \rightarrow b = r, a = -\frac{1}{r}$$